

# Farbe als Qualitätskriterium

---

## Wie sich Ausreißer oder Fehlchargen durch Farbmessung finden lassen

Georg Meichsner und Renate Hiesgen, Hochschule Esslingen

### Abstract

Am Beispiel der Produktion rostroter Fertigteile wird gezeigt, wie die Lage des Prozesses und seine Streuung anhand farbmischer Größen mit multivariaten statistischen Methoden beschrieben werden können. Der Unterschied zwischen Spezifikation und Toleranz auf der einen Seite und der Prozesslage und -streuung, beschrieben durch die quadratische Mahalanobis-Distanz auf der anderen Seite wird verdeutlicht.

### Lage und Streuung eines Prozesses

Industrielle Produktionsprozesse werden durch Messgrößen überwacht, die sich in der Regel an den Endigenschaften der Produkte (Farbe, Glanz, mechanische Eigenschaften, Beständigkeiten und Funktionalitäten) und an Prozessparametern orientieren. Ziel ist es, einen stabilen Produktionsprozess mit einem gleich bleibenden Qualitätsniveau zu gewährleisten [1–4]. In dieser Arbeit befassen wir uns einerseits mit der Farbe als Qualitätskriterium und andererseits mit den Farbörtern zur Beschreibung der Prozesslage und -streuung.

Eine Farbe wird durch ihren Farbort beschrieben, der ein Vektor im Farbenraum, mit den drei Komponenten  $L^*, a^*, b^*$  ist. Der Unterschied zweier Farbörter wird durch den Farbabstand  $\Delta E^*_{ab}$  quantifiziert [5, 6].

Ein Prozess, sei es ein Messprozess oder ein Produktionsprozess, liefert eine bestimmte Lage der um einen mittleren Farbort streuenden Farbörter im Farbenraum – eine Streuwolke, die im Allgemeinen nicht an den Koordinatenachsen des Farbenraumes orientiert ist. In Abb. 1 liegt die Streuwolke schräg im CIELAB-Farbenraum und zeigt, welche Farbörter bei einer stabil laufenden Produktion erhalten werden.

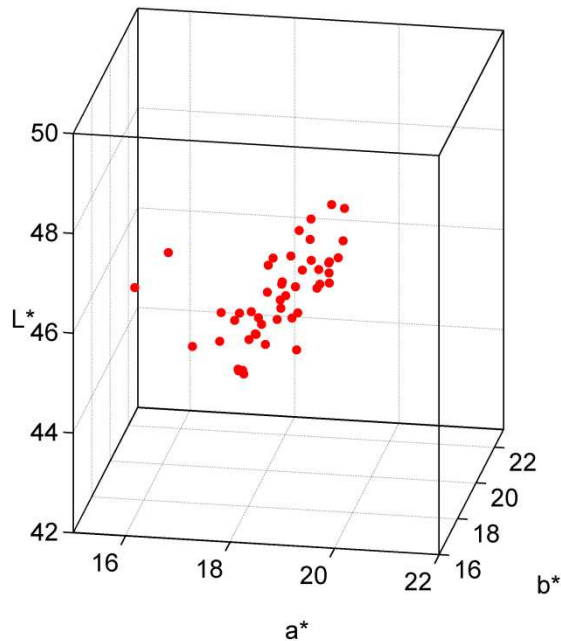


Abb. 1: 50 Farbörter rostroter Fertigteile (jeder Farbort ist ein Mittelwert aus 20 Messungen auf einem Fertigteile) – Die Streuwolke liegt schräg im CIELAB-Farbraum und zeigt welche Farbörter bei stabil laufender Produktion erhalten werden.

Lage- und Streumaße für die Farbörter sind der arithmetische Mittelwert und ein Prognoseellipsoid mit einem bestimmten Vertrauensniveau  $(1-\alpha)$ , das die Daten umhüllt. Die nächste Messung oder die nächste Produktionscharge wird mit der Wahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  einen Farbort innerhalb des Prognoseellipsoids liefern.

## Analyse der Prozessstreuung

Es gibt verschiedene Arten, wie man Proben messtechnisch beurteilt. Am häufigsten wird der Farbabstand zu einem Referenzmuster angewandt [5, 6]. Proben, die außerhalb der Toleranz liegen, d. h. einen größeren Farbabstand vom Referenzmuster haben als der Toleranzwert, gelten als nicht typkonform.

Derartige nicht typkonforme Proben sind jedoch nicht zwangsläufig Ausreißer oder Fehlchargen, die zu einem Eingreifen in den Prozess führen müssen. Prozesslage und der Prozessstreuung, die mit Hilfe der multivariaten Statistik ermittelt werden hat zunächst nichts gemein mit einer Spezifikation.

Weil die Messunsicherheiten (die Fehler) der Farbkoordinaten untereinander nicht unabhängig sind - es treten Kovarianzen auf - ist das Streuellipsoid in der Regel nicht an den Achsen ausgerichtet. Um ein Streuellipsoid zu berechnen, benötigt man den mittleren Farbort, die Varianzen (Gl. 1) und die Kovarianzen (Gl. 2) der Farbörter, aus denen man die Kovarianzmatrix

erstellt (Gl. 3, Zeilen und Spalten der Kovarianzmatrix ordnet man nicht in der Reihenfolge  $L^*, a^*, b^*$ , sondern  $a^*, b^*, L^*$ , weil in Zeichenprogrammen als senkrechte Achse immer die dritte Koordinate genommen wird). Die Inverse der Kovarianzmatrix (Gl. 4) enthält die Koeffizienten der Ellipsoidgleichung (Gl. 5). Sind die aus den Kovarianzen hervorgegangenen Koeffizienten ( $g_{ik}$ , mit  $i \neq k$ ) von Null verschieden, was in der Regel der Fall ist, so ist das Prognoseellipsoid nicht an den Achsen ausgerichtet.

$$\text{Gl. 1} \quad v_{11} = \text{var}(a^*) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i^* - \bar{a}^*)^2$$

$$\text{Gl. 2} \quad v_{12} = v_{21} = \text{cov}(a^*, b^*) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i^* - \bar{a}^*) \cdot (b_i^* - \bar{b}^*)$$

$$\text{Gl. 3} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Gl. 4} \quad \mathbf{G} = \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Gl. 5} \quad g_{11} \cdot (a^* - \bar{a}^*)^2 + g_{22} \cdot (b^* - \bar{b}^*)^2 + g_{33} \cdot (L^* - \bar{L}^*)^2 + 2 \cdot g_{12} \cdot (a^* - \bar{a}^*) \cdot (b^* - \bar{b}^*) + 2 \cdot g_{23} \cdot (b^* - \bar{b}^*) \cdot (L^* - \bar{L}^*) + 2 \cdot g_{13} \cdot (a^* - \bar{a}^*) \cdot (L^* - \bar{L}^*) = T^2$$

Der quadratische Ellipsoidradius  $T^2$  ist ein statistisches Distanzmaß. Alle Farbörter, die auf einer Ellipsoidoberfläche mit gleichem Ellipsoidradius liegen, haben die gleiche statistische Distanz vom mittleren Farbort des Prozesses. Schätzt man den Ellipsoidradius mit einer geeigneten Verteilungsfunktion, so erhält man das Prognoseellipsoid, innerhalb dessen die gemessenen Farbörter mit der Wahrscheinlichkeit  $(1-\alpha)$  liegen. Die Oberflächen selbstähnlicher Ellipsoide um den mittleren Farbort umhüllen mit steigendem Ellipsoidradius jeweils einen größeren Bruchteil aller Farbörter der Grundgesamtheit. Der Ellipsoidradius als statistisches Distanzmaß wird nach seinem Erfinder Mahalanobis-Distanz genannt. In der Literatur wird er häufig auch als Hotelling's  $T^2$  bezeichnet [2, 3].  $T^2$  ist der gewichtete euklidische Abstand eines Farbortes vom mittleren Farbort.  $T^2$  lässt sich mit einer geeigneten Verteilungsfunktion, z. B. der Fischerverteilung oder der Betaverteilung, aus einer Stichprobe schätzen (s. Gl. 6) [2, 3].

$$\text{Gl. 6} \quad T^2 \approx \frac{3 \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{n \cdot (n-3)} \cdot F_{(3, n-3, 1-\alpha)} \quad \text{oder} \quad T^2 \approx \frac{(n-1)^2}{n} \cdot B_{(3/2, (n-3-1)/2, 1-\alpha)}$$

Farbenräume sind so skaliert, dass visuell gleiche Farbabstände in allen Regionen des Farbenraumes einen gleichen euklidischen Abstand besitzen. Dies ist beim CIELAB-Farbenraum

für  $\Delta E_{ab}^* > 5$  und im DIN99 Farbenraum für  $\Delta E_{ab}^* < 5$  der Fall. Weil sich die Einteilungen der Skalen nicht an beobachteten Prozessen orientieren, erwartet man bei stochastischer Streuung keine gleichförmige (kugelförmige) Ausdehnung der Streuwolke im Raum, sondern ein Ellipsoid. Dies ist unabhängig davon, ob man sich im CIELAB- oder im DIN99-Farbenraum befindet.

$T^2$  ist ein Kriterium zur Beschreibung des Prozesses, das die statistische Distanz eines gemessenen Farbortes vom mittleren Farbort beschreibt.  $T^2$  ist damit das Quadrat eines gewichteten euklidischen Abstandes der in Form der Mahalanobis-Distanz auf eine eindimensionale Größe reduziert ist. Für diese lässt sich ein Grenzwert abschätzen, mit dessen Hilfe man entscheiden kann, ob ein Messwert ein Ausreißer ist oder zur Grundgesamtheit gehört.

Ein Farbabstand ist ein Qualitätskriterium, das im Fall von  $\Delta E_{ab}^*$  und  $\Delta E_{99}$  den euklidischen Abstand eines Farbmusters von einer Referenzprobe quantifiziert. Das Kriterium ist hierbei der visuell empfundene Farbunterschied, der mit Hilfe einer Farbabstandsformel angenähert werden soll. Bei Verwendung von Farbabstandsformeln wie der DIN99-Farbabstandsformel [7], CMC-, CIE94- oder CIE2000-Farbabstandsformel [8–11] erhält man eine bessere Übereinstimmung zum visuellen Empfinden als bei der Verwendung des CIELAB  $\Delta E_{ab}^*$ .

## Ermittlung der Prozesslage und Ausreißerprüfung

Die Ermittlung von Lage und Streuung eines Prozesses wirkt sich auf die Bewertung aller folgenden Messwerte aus. Man sollte deshalb hierzu einen Datensatz verwenden, der frei ist von Ausreißern. In der statistischen Prozesskontrolle (SPC= Statistical Process Control) [1–3], ermittelt man in der Phase I die Prozesslage, in der Phase II überwacht man den Prozess mit den in Phase I gewonnen Prozessgrenzen. Man beginnt in Phase I mit einem historischen Datensatz (HDS), der repräsentative Messwerte des Prozesses enthält [2].

Ein Ausreißer ist ein Messwert, der nicht zur Grundgesamtheit gehört. Ein Ausreißer kann eine Fehlmessung oder eine Fehlcharge sein. Wird die Prozesslage durch ein Prognoseellipsoid mit dem Vertrauensniveau  $(1-\alpha)$  geschätzt, dann ist ein Messwert außerhalb des Prognoseellipsoids mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha$  ein Ausreißer. Verwendet man ein Prognoseellipsoid mit  $(1-\alpha)=0.99$ , so ist ein außerhalb liegender Farbort in einem Prozent aller Fälle kein Ausreißer, d.h. die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt 0.01 oder 1%.

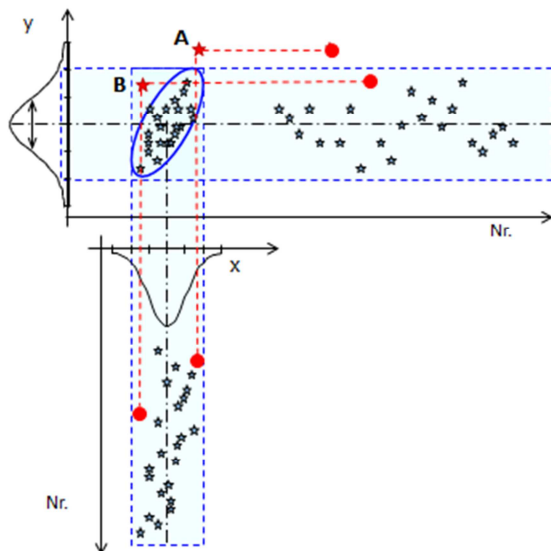


Abb. 2: Streuung und Lage eines zweidimensionalen Prozesses (blaue Ellipse), der mit zwei eindimensionalen Charts für x und y überwacht wird. Punkt A wird zumindest im Chart für die Größe y als Ausreißer entdeckt. Punkt B liegt außerhalb der Prozessgrenzen, wird jedoch weder im x- noch im y-Chart als Ausreißer identifiziert.

Am Beispiel eines Produktionsprozesses, bei dem rostrote Produkte erzeugt wurden, wird die Prüfung auf Ausreißer erläutert. In diesem Beispiel wurden aus einem stabil laufenden Prozess 50 Probetafeln aus der Produktion farbmessungsgemessen und deren Farbkoordinaten bestimmt. Diese prüft man auf Ausreißer, indem man den Mittelwert und die Kovarianzmatrix berechnet. Die Inverse der Kovarianzmatrix enthält die Koeffizienten der Ellipsoidgleichung, mit der sich die quadratischen Mahalanobis-Distanzen aller Daten errechnen lassen. Geht man von einer Stichprobe aus, was bei der hier beschriebenen Untersuchung und bei farbmessungsgemessenen Messungen im Rahmen der Qualitätssicherung in der Regel der Fall ist, so verwendet man zur Schätzung der oberen Eingriffsgrenze (Upper Control Limit, UCL) die Fischer-Verteilung oder die Beta-Verteilung [2, 3].

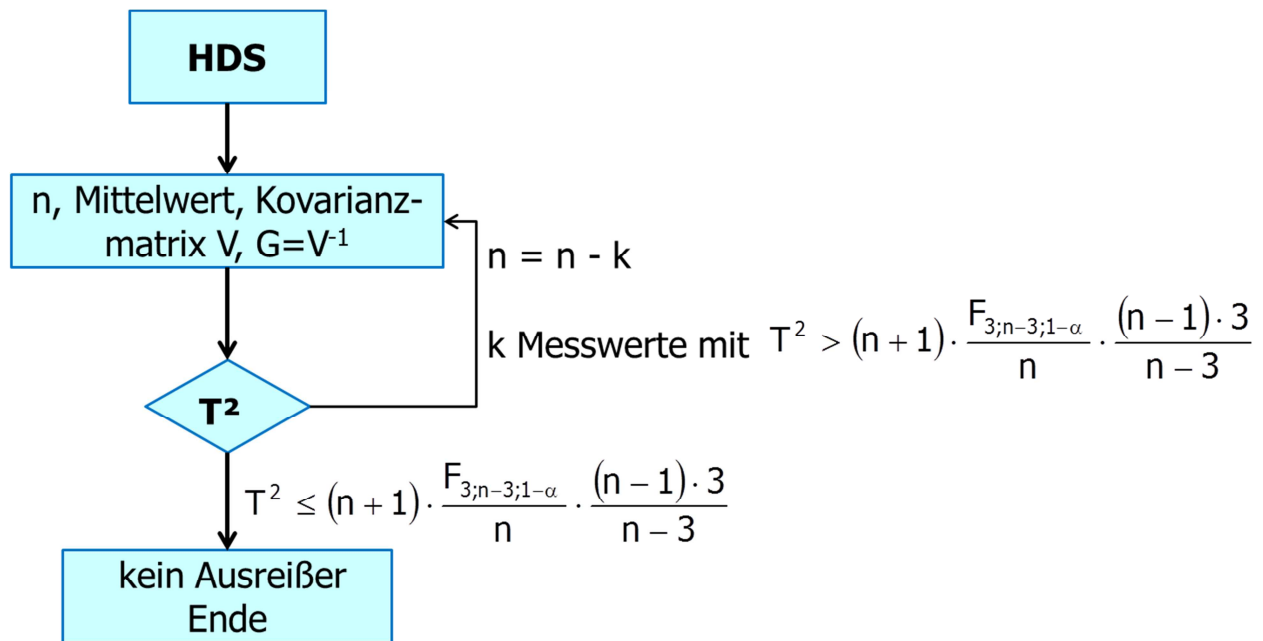


Abb. 3: Fließschema der Ausreißerprüfung und Festlegung der Prozessgrenze (upper control limit, UCL).

Zum Vergleich der quadratischen Mahalanobis-Distanz eines jeden Farbortes mit dem Upper Control Limit (UCL) ist ein  $T^2$ -Chart ein geeignetes Werkzeug (s. Abb. 4, links).

Nachdem man die Werte mit einer quadratischen Mahalanobis-Distanz größer als das UCL identifiziert und eliminiert hat, berechnet man erneut den mittleren Farbort, die Kovarianzmatrix, ihre Inverse und das UCL. Sind keine Werte außerhalb des UCL mehr vorhanden, so beendet man die Phase I (Abb. 3). Andernfalls wird der Vorgang so oft wiederholt, bis keine Ausreißer mehr vorhanden sind. In der Phase II verwendet man zur Ausreißerkontrolle die Werte der Phase I.

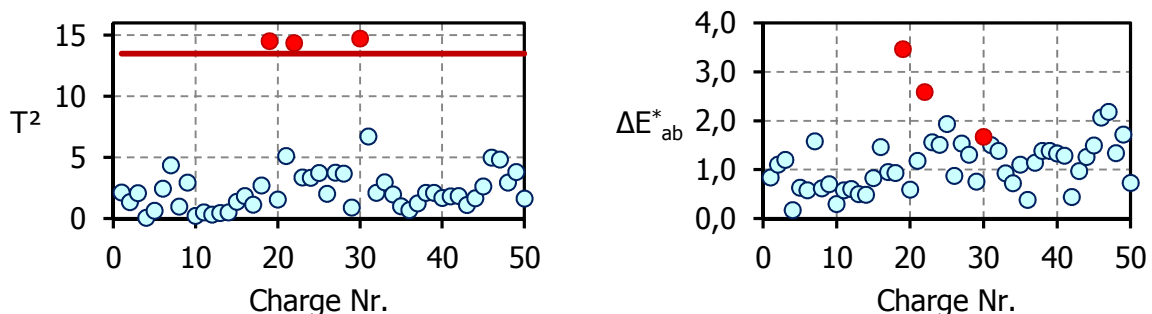


Abb. 4: Prozessüberwachung mit einem  $T^2$ -Chart (links, UCL als rote Linie eingezeichnet) und mit einem  $\Delta E^*_{ab}$ -Chart. Im  $\Delta E^*_{ab}$ -Chart haben nur zwei der Ausreißer die höchste Farbdifferenz vom mittleren Farbort.

Ein Mess- oder Produktionsprozess wird also durch seinen mittleren Farbort und sein Prognoseellipsoid beschrieben. Alle Messungen oder Chargen, deren Farbörter innerhalb des Prognoseellipsoids liegen, gehören zur Grundgesamtheit und damit zum Prozess. Idealerweise liegt das Prognoseellipsoid vollständig innerhalb der Spezifikationsgrenzen, die farbmetrisch in Form von Farbabständen definiert sind ( $\Delta E_{ab}^*$ ,  $\Delta E_{99}$ ,  $\Delta E_{CMC}$ ,  $\Delta E_{2000}$  etc.). Sind Spezifikationsgrenzen enger als die Prozessgrenzen, so werden regelmäßig nicht typkonforme Produkte erzeugt. Verwendet man diese als Anlass zur Regelung des Prozesses, so verlässt man die stabile Prozesslage. Eine Prognose über die Farbörter der erzeugten Produkte ist dann nicht mehr möglich.

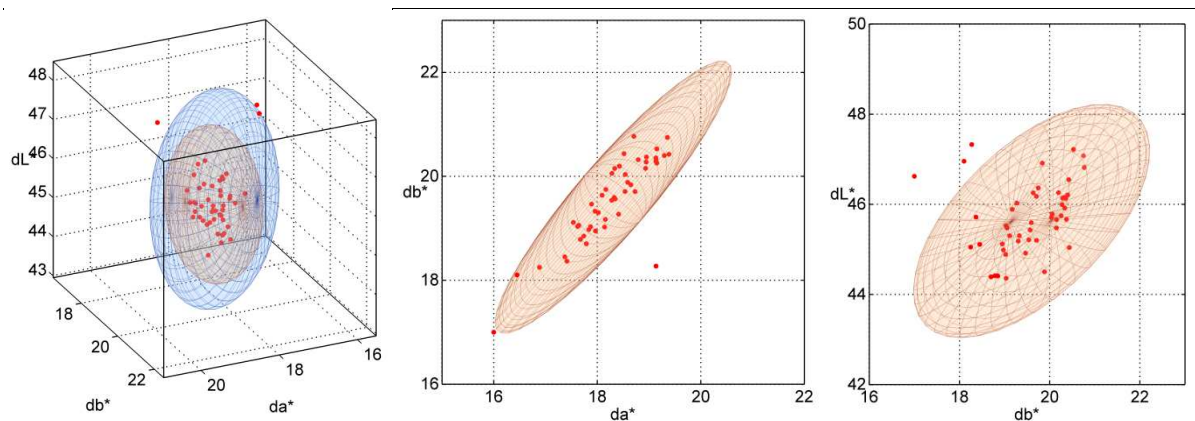


Abb. 5: Prognoseellipsoid für ein Vertrauensniveau von  $(1-\alpha)=0.99$  vor Elimination der Ausreißer (links, blaues Ellipsoid) und nach Elimination der Ausreißer (rotes Ellipsoid).

## Unterscheidung von Mahalanobis-Distanz und Farbabstand

Abb. 4 zeigt, dass im  $T^2$ -Chart Proben als Ausreißer identifiziert werden, die bei Kontrolle des Farbabstandes  $\Delta E_{ab}^*$  nicht als solche identifizierbar wären. Die Ursache dafür ist, dass  $T^2$  als Kriterium für die Prozesslage und -streuung viel empfindlicher auf Ausreißer reagiert als der Farbabstand. Eine als Farbabstand festgelegte Toleranz (Spezifikationsgrenze) orientiert sich am visuellen Empfinden und nicht an Prozessvariablen, sie ist ein zwischen Kunde und Lieferant ausgehandelter Grenzwert.

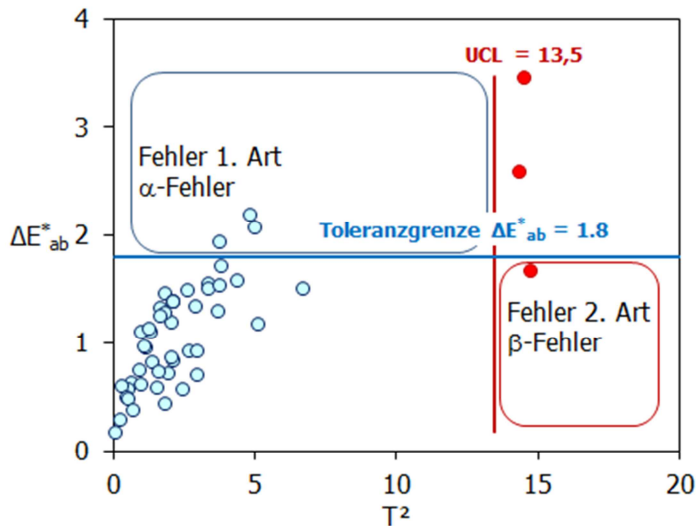


Abb. 6: Farbabstand  $\Delta E_{ab}^* = 1,8$  als Toleranzgrenze und UCL  $T^2=13,5$  als Prozessgrenze

## Fazit

Die farbmetrische Kontrolle von Prozessen ist ein Problem der multivariaten Statistik. Prozesslage und Prozessstreuung sollten mit entsprechenden Methoden durchgeführt werden. Korrekt angewendet lässt sich die Lage des eigenen Prozesses und seine Streuung erkennen und eine Voraussage über die Anzahl von Fehlchargen treffen. Bei der Statistischen Prozesslenkung ist die Kontrolle des Prozesses mithilfe eines  $T^2$ -Charts notwendig. Nur so lässt sich erkennen, wenn ein Prozess aus der stabilen Lage wandert. Anhand der Toleranzgrenze in Form eines Farbabstandes ist dies nicht möglich und würde gar zu einer ungewollten Verschiebung von Prozesslage und Streuung führen.

## Literatur

- [1] Deutsche Gesellschaft für Qualität e. V. (DGQ): *SPC 1 - Statistische Prozesslenkung*, Beuth Verlag GmbH, 1990.
- [2] R. L. Mason, J. C. Young: *Multivariate statistical process control with industrial applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics; ASA, Philadelphia, PA, Alexandria, VA, 2002.
- [3] D. C. Montgomery: *Statistical quality control: A modern introduction*, 6th ed., John Wiley & Sons, Hoboken, N.J., 2009.



- [4] O. Beucher: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik mit MATLAB*, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [5] DIN 6174: *Farbmetrische Bestimmung von Farbabständen bei Körperfarben nach der CIELAB-Formel*, Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag GmbH, Berlin, 1979.
- [6] DIN EN ISO 11664-4: *Farbmetrik – Teil 4: CIE 1976 L\*a\*b\* Farbenraum*, Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2012.
- [7] DIN 6176: *Farbmetrische Bestimmung von Farbabständen bei Körperfarben nach der DIN99-Formel*, Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2001 .
- [8] T. Bäurle et al.: *Coloristik für Lackanwendungen*, Vincentz Network, Hannover, 2012.
- [9] F. W. Billmeyer, M. Saltzman: *Grundlagen der Fabertechnologie*, 2nd ed., Muster-Schmidt, Göttingen, 1993.
- [10] G. A. Klein: *Farbenphysik für industrielle Anwendungen*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [11] H. G. Völz: *Industrielle Farbprüfung: Grundlagen und Methoden*, 2nd ed., VCH-Verlagsgesellschaft; VCH, Weinheim 2001.